数理解析研究所講究録
480巻 1983年 87-108

Grothendieck Toposへの入門試論

九大工学部　倉田令二朗
(Reijiro Kurata)

・本論の意図 (1) Grothendieck Topos の入門にあたっては一貫して古典的,集合論的,すなわちexternalな立場をとるのも見識ではあるが、できるだけ一般のトポスにおいてsheafを定義するLawvere-Tierneyのinternalな方法を用いて簡単で見通しのよい諸定理の証明を与えるのが教育的と考える。

本論は不十分なものだがその最初の試論である。以下の定義や定理における$(\ )_e$, $(\ )_i$はexternal, internalを区別するものである。また参考書は

[M.R] Makkai, Reyes, First order Categorical Logic, Springer Lecture Note 611 (1977).

[J] Johnstone Topos Theory, Academic Press (1977).

(2) (1)で述べたやり方でGrothendieck Toposに関する基本的性質,すなわちいかなるToposがGrothendieckであるか(Giraud),またSh(H)であるか, さらにGrothendieck Topos

のSh(H)への埋込み(Barr, Diaconescu, Makkai; Reyes), および著者によるProgenitorがらみの問題を一つの観点(2.1, 2.2)から扱う。(3) 埋め込み定理に関してはDiaconescuの方法によって証明を完成させるが、これは[M.R]におけるような完全性定理を用い~~ないものである.~~るものではない。最後に新証明を与える。

§0 Grothendieck Topology と Sheaf.

[0.1] Grothendieck Topology と Sheaf

(1)$_e$ Pretopology (covering family)

$\mathbb{C}$ を finite left limit をもつ Category とし、対象 $A \in \mathbb{C}$ に対し $Cov(A)$ は次の条件をみたす射の族 $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I}$ の集合である。

Cov(i) 同型射 $A \xrightarrow{f} A$ に対し、$(A \xrightarrow{f} A) \in Cov(A)$

Cov(ii) (stability) $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I} \in Cov(A)$ と任意の射 $B \xrightarrow{g} A$ in $\mathbb{C}$ に対し、$(A_i \times_A B \to B)_{i \in I} \in Cov(B)$

Cov(iii) (closure under composition)

$(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I} \in Cov(A)$, $(A_{ij} \xrightarrow{g_{ij}} A_i)_{j \in J_i} \in Cov(A_i)$ ならば

$$(A_{ij} \xrightarrow{f_i \circ g_{ij}} A)_{i \in I, j \in J_i} \in Cov(A)$$

Cov(iv) (monotonicity) $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I} \in Cov(A)$ と射の族 $(B_j \xrightarrow{g_j} A)_{j \in J}$ に対し、任意の $i \in I$ に対し f_i がある g_j を通過するならば $(B_j \xrightarrow{g_j} A)_{j \in J} \in Cov(A)$, $(Cov(A))_{A \in \mathbb{C}}$ を $\mathbb{C}$ 上の pretopology という。

(1′)$_e$ Topology (covering crible)

$\mathbb{C}$ を任意の Category[1], $A \in \mathbb{C}$ に対する $J(A)$ は次の条件をみ

たすAのcribleの集合とする.

J(i) Aのmaximum cribleは$J(A)$に入る.

J(ii) (stability) $R\in J(A)$と$B\xrightarrow{f}A$ in $\mathbb{C}$に対し,

$$f_*^{-1}(R)=\{g \mid X\xrightarrow{g}B\xrightarrow{f}A\in J(A)\}\in J(B)$$

J(iii) (local character) R, R'はAのcrible, $R\in J(A)$とする

もしすべての$B\xrightarrow{f}A\in R$に対し$f_*^{-1}(R')\in J(B)$ならば$R'\in J(A)$.

注 1) $\mathbb{C}$はfinite left limitをもたなくてよい.

射の族$\alpha=(A_i\xrightarrow{f_i}A)_{i\in I}$に対し, $[\alpha]$によって, αによって生成されたAのcribleをあらわすとする.

命題 0.1e ① finite left limitをもつ圏$\mathbb{C}$においてCov(i)~(iv)をみたす$Cov(A)_{A\in\mathbb{C}}$が与えられたとする. そのとき, $J(A)=\{[\alpha]\,;\,\alpha\in Cov(A)\}$とおけば$J(A)_{A\in\mathbb{C}}$はJ(i)~(iii)をみたす. ② 同じ$\mathbb{C}$においてJ(i)~(iii)をみたす$J(A)_{A\in\mathbb{C}}$が与えられたとする. そのとき$Cov(A)=\{\alpha\,;\,[\alpha]\in J(A)\}$とおけば, これはCov(i)~Cov(iv)をみたす. ③ ①と②は逆の関係にある.

Pretopology $Cov(A)_{A\in\mathbb{C}}$, ないしはtopology $J(A)_{A\in\mathbb{C}}$の与えられた圏$\mathbb{C}$をsiteという.

(2)e sheaf (層)

$\mathbb{C}$をfinite left limitをもつsiteとする. $(A_i\xrightarrow{f_i}A)_{i\in I}\in Cov(A)$と$\mathbb{C}$上のpresheaf $F\in\hat{\mathbb{C}}=\mathcal{S}^{\mathbb{C}^{op}}$に対し, $\hat{\mathbb{C}}$における射の族$(A_i\xrightarrow{\xi_i}F)_{i\in I}$がcovering $(A_i\xrightarrow{f_i}A)_{i\in I}$に対し<u>compatible</u>とは

下の図式において、任意の $i, j \in I$ に対し $\xi_i p_1^{ij} = \xi_j p_2^{ij}$ となることである。

$$\begin{tikzcd}
 & A_i \arrow[dr, "f_i"] \arrow[drr, "\xi_i"] & & \\
A_i \times_A A_j \arrow[ur, "p_1^{ij}"] \arrow[dr, "p_2^{ij}"'] \arrow[rr, phantom, "\text{p.b.}"] & & A \arrow[r, dashed, "\xi"] & F \\
 & A_j \arrow[ur, "f_j"] \arrow[urr, "\xi_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

ここに A_i, A はそのrepresentable presheaf $\hat{A}_i = (-, A_i)$, $\hat{A} = (-, A)$ と同一視されている。

presheaf F on $\mathbb{C}$ が族 $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I}$ に対し **sheaf property** をもつとは、$(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I}$ に関する任意の compatible family $(A_i \xrightarrow{\xi_i} F)_{i \in I}$ に対し、上図式を可換にするような $\xi ; A \to F$ が唯一つ存在することである。最後に F が **$\mathbb{C}$ 上の sheaf** であるとは任意の $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I} \in Cov(A)$ に対し、F が sheaf property をもつことである。

(2)' presheaf F が site $\mathbb{C}$ 上の sheaf であるための条件は任意の $A \in \mathbb{C}$ と任意の covering crible $R \in J(A)$ に対し、

$$\hat{\mathbb{C}}(A, F) \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}(R, F) \quad ((A \to F) \mapsto (R \rightarrowtail A \to F))$$

が同型となることである。ここでも A は representable presheaf $\hat{A}$ と同一視され、crible R は $\hat{A}$ の subpresheaf $\hat{R}$ と同一視されている。

Canonical Grothendieck Topology すべての representable presheaf を sheaf とするような最強の (i.e. $J(A)$ がもっとも多い) topology のことをいう。そのとき $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I}$ が covering family であるための条件は effective epimorphic (すべての representable presheaf がこれに関して sheaf property をもつ) かつ、この性質

が pullback で不変なこと (stable) であることである。

[0.2] Topos における Topology と sheaf (Lawvere-Tierney 理論)

(1): Topology, elementary topos $\mathbb{E}$ の topology とは 次の条件 j1)〜j3) をみたす $\mathbb{E}$ の map $\Omega \xrightarrow{j} \Omega$ (Ω は subobject classifier) のことである。 j1) $j \circ t = t$, j2) $j \circ j = j$, j3) $\wedge \circ (j \times j) = j \circ \wedge$

<u>closure operator</u> subobject $A' \rightarrowtail A$ (その characteristic map を $\varphi : A \to \Omega$ とする) に対する closure $\overline{A'} \rightarrowtail A$ (または $\overline{A' \rightarrowtail A}$ とかく) とは $j \circ \varphi$ ($A \xrightarrow{\varphi} \Omega \xrightarrow{j} \Omega$) によって classify される A の subobject のこと。

(2): dense, closed subobject, j-sheaf

$A' \rightarrowtail A$ が j-dense とは $\overline{A'} \cong A$ のこと, $A' \rightarrowtail A$ が j-closed とは $\overline{A'} \cong A'$ のことをいう。

<u>Def</u> J $J \rightarrowtail \Omega$ は $\Omega \xrightarrow{j} \Omega$ によって classify される subobject

<u>Def</u> Ω_j equalizer $\Omega_j \overset{e}{\rightarrowtail} \Omega \overset{1_\Omega}{\underset{j}{\rightrightarrows}} \Omega$ によって $\Omega_j \overset{e}{\rightarrowtail} \Omega$ を定める。

そのときは $k : \Omega \overset{k}{\twoheadrightarrow} \Omega_j$ があり。 $\Omega \xrightarrow{j} \Omega = \Omega \overset{k}{\twoheadrightarrow} \Omega_j \overset{e}{\rightarrowtail} \Omega$ は j の epi-mono factorization を与える。

Prop(0.2): $A' \rightarrowtail A$ は j-dense $\Leftrightarrow$ $ch(A') : A \xrightarrow{\varphi} \Omega$ は J を通る。

$A' \rightarrowtail A$ は j-closed $\Leftrightarrow$ $ch(A') : A \xrightarrow{\varphi} \Omega$ は Ω_j を通る。

<u>Def</u> j-sheaf Topos $\mathbb{E}$ の対象 A が j-sheaf とは, 任意の j-dense $B' \rightarrowtail B$ に対し, $(B, A) \to (B', A)$ が同型であること。

Prop(0.3): $\mathbb{E}$, j 等は上と同じとする。 そのとき

$B' \rightarrowtail B$ が j-dense $\Longleftrightarrow$ 任意の j-sheaf に対し, $(B, A) \to (B', A)$ が iso.

証明. $\Rightarrow$ は定義にふくまれるから $\Leftarrow$ をいえばよい。

j-sheaf A と $B' \to A$ に対し、$B' \to A = B' \rightarrowtail B \to A$ となる $B \to A$ が唯一つあるとする。A としてとくに Ω_j をとると、任意の closed subobject $X' \rightarrowtail B'$ に対し、closed subobject $X \rightarrowtail B$ が同型をのぞいて唯一つ存在して $X' \rightarrowtail B' = (B' \overset{h}{\rightarrowtail} B) \wedge (X \rightarrowtail B)$.

(一般に任意の $B \to \Omega_j$ に対し
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\text{p.b.}"'] & 1 \arrow[d, "\text{true}"] \\ B \arrow[r] & \Omega_j \end{tikzcd}$$
による $X \rightarrowtail B$ は closed subobject を与える.)

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "\text{p.b.}"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "\text{p.b}"'] & 1 \arrow[d, "\text{true}"] \\ B' \arrow[r, "h"] & B \arrow[r] & \Omega_j \end{tikzcd}$$
が成立っているのであるが $X' \rightarrowtail B'$ が $B' \overset{1_{B'}}{\rightarrowtail} B'$ のとき、一方で $B' = (B' \overset{h}{\rightarrowtail} B) \wedge (B \overset{1_B}{\to} B)$, 他方で $B' = (B' \overset{h}{\rightarrowtail} B) \wedge (\overline{B'} \rightarrowtail B)$, $X \rightarrowtail B$ の一意性から $\overline{B'} \cong B$ ゆえに $B' \rightarrowtail B$ は dense となる □.

(3) i.e. Grothendieck Topology との関係

$(\mathbb{C}, J)$ は site, J は $\mathbb{C}$ 上の Grothendieck Topology とする。

$\mathbb{C} \ni X \mapsto J(X)$, $Y \xrightarrow{f} X$ in $\mathbb{C} \longmapsto J(X) \xrightarrow{J(f)} J(Y)$ (crible $R \mapsto f_*^{-1}(R)$)

によって J は functor $\mathbb{C}^{op} \to \mathcal{S}$ を定義する。そして $\hat{\mathbb{C}}$ において $J \rightarrowtail \Omega$ である。ここに Ω は Topos $\hat{\mathbb{C}}$ の subobject classifier であって $\mathbb{C} \ni X$ に対し $\Omega(X) = \{\text{crible of } X\}$ によって定義される

Prop 0.4 i.e. J を $\mathbb{C}$ 上の Grothendieck Topology とし、$J \rightarrowtail \Omega$ の $\hat{\mathbb{C}}$ における classifying map を $\Omega \xrightarrow{j} \Omega$ とする。そのとき、

① j は $(1)_c$ の意味における $\hat{\mathbb{C}}$ の topology である。

①', $\hat{\mathbb{C}}$ における subpresheaf $J \rightarrowtail \Omega$ に対し、その charac map $\Omega \xrightarrow{j} \Omega$ が $\hat{\mathbb{C}}$ の topology ならば J は Grothendieck Topology.

② $F \in \hat{\mathbb{C}}$ が $(\mathbb{C}, J)$ 上の sheaf $\Longleftrightarrow$ F は j-sheaf

③ R を crible of ($\mathbb{C}$ の object X) とするとき

$R \in J(X) \Longleftrightarrow R \rightarrowtail X$ は j-dense in $\hat{\mathbb{C}}$.

④ Grothendieck topology J に対応する $\Omega \xrightarrow{j} \Omega$ は次のように定義される. $j_X : \Omega(X) \to \Omega(X)$ は任意の $R \in \Omega(X)$ を

$j_X(R) = \{ Y \xrightarrow{f} X \ ; \ f_X^{-1}(R) \in J(Y) \}$ にうつす.

$\Omega_j(X)$ は j_X の像である.

① 一般の j-dense $G' \rightarrowtail G$ in $\hat{\mathbb{C}}$

$G \in \hat{\mathbb{C}}$ は $G = \varinjlim_{\alpha} X_\alpha$ (X_α は representable i.e. $X_\alpha \in \mathbb{C}$)

と書けるが、この Colimiting Cone $X_\alpha \to G$ に対して

$$\begin{tikzcd} R_\alpha \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & X_\alpha \arrow[d] \\ G' \arrow[r, tail] & G \end{tikzcd}$$

をつくれば $G' = \varinjlim_{\alpha} R_\alpha$ (colimit は universal in $\hat{\mathbb{C}}$),

このとき $G' \rightarrowtail G$ j-dense $\Longleftrightarrow$ すべての α に対して $R_\alpha \rightarrowtail X_\alpha$ j-dense

$\Rightarrow$ はあきらか、任意の sheaf F に対して $\hat{\mathbb{C}}(X_\alpha, F) \to \hat{\mathbb{C}}(R_\alpha, F)$ が同型なら $\hat{\mathbb{C}}(G, F) \to \hat{\mathbb{C}}(G', F)$ も同型で (0.3) により $G' \rightarrowtail G$ は dense となる.

(4): Topos $\tilde{\mathbb{E}}_j$, associated sheaf functor

$\tilde{\mathbb{E}}_j$ $(= Sh_j(\mathbb{E}))$ をすべての j-sheaf object のつくる $\mathbb{E}$ の full sub category とする.

Prop 0.5: inclusion functor $\tilde{\mathbb{E}}_j \xrightarrow{i} \mathbb{E}$ は left exact な left adjoint $a \dashv i$ をもつ. これを associated sheaf functor という.

$X\in\mathbb{E}$ に対し，$a(X)$ は次のように定まる。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\{\cdot\}"] \arrow[dr, two heads] & \Omega^X \arrow[r, "j^X"] & \Omega_j^X \\ & Y \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

epi-mono 分解をつくり，$a(X)=\overline{Y}(\text{in }\Omega_j^X)$ とおく。

Prop 0.6：$\tilde{\mathbb{E}}_j$ は Topos である。ベキ A^B は $\mathbb{E}$ のそれと同じ，$\tilde{\mathbb{E}}_j$ の subobject classifier は $1\xrightarrow{j\cdot t}\Omega_j$ である。

§1. Lifting up to $\hat{\mathbb{C}}$.

1.1e Prop. $\mathbb{C}$，$\mathbb{D}$ は Category，$\mathbb{D}$ は localy small，$u:\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ は Functor とする。$u_\cdot:\hat{\mathbb{D}}\to\hat{\mathbb{C}}$ は，$F\in\hat{\mathbb{D}}$ に対し $u_\cdot F=F\circ u$ によって定義される functor とする。そのとき Functor $u^\cdot, u_r:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{D}}$ が存在して，$u^\cdot\dashv u_\cdot\dashv u_r$ かつ

h^C, h^D は Yoneda embedding

$X\longmapsto\hat{X}=(-,X)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, "h^C"'] & \mathbb{D} \arrow[d, "h^D"] \\ \hat{\mathbb{C}} \arrow[r, shift left=2, "u^\cdot"] \arrow[r, shift right=2, "u_r"'] & \hat{\mathbb{D}} \arrow[l, "u_\cdot"'] \end{tikzcd}$$

が可換。

証明，$D\in\mathbb{D}$ に対し，圏 $(D\downarrow u)$（対象は $D\to uC$ in $\mathbb{D}$，map は
$\begin{tikzcd}[row sep=small] D \arrow[r] \arrow[dr] & uC \arrow[d, "uf"] \\ & uC' \end{tikzcd}$
なる f）圏 $(u\downarrow D)$（対象は $uC\to D$，map は
$\begin{tikzcd}[row sep=small] uC \arrow[d, "uf"'] \arrow[r] & D \\ uC' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$
なる f）とし，$F\in\hat{\mathbb{C}}$ に対し，

$$u^\cdot F(D)=\varinjlim_{D\to uX\in(D\downarrow u)^{op}}F(X)\qquad u_rF(D)=\varprojlim_{uX\to D\in(u\downarrow D)^{op}}F(X)$$

とすればよい。

1.2e $\langle u_\cdot, u_r\rangle:\hat{\mathbb{D}}\to\hat{\mathbb{C}}$ はつねに geometric morphism である。

1.3e $\langle u^\cdot\ u_\cdot\rangle:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{D}}$ は geometric morphism とはかぎらない。

$\mathbb{C}$，$\mathbb{D}$ が product をもち u がそれを preserve するなら $(D\downarrow u)^{op}$ は filtered category になるから $u^\cdot$ は left exact，$\langle u^\cdot\ u_\cdot\rangle$ は geometric morphism になる。([M.R] 39〜40)。

§2 Lifting up to $\widetilde{\mathbb{C}}$.

2.0
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h^C"'] & \mathbb{D} \arrow[d, "h^D"] \\
\hat{\mathbb{C}} \arrow[r, shift left=2, "u^{\cdot}"] \arrow[d, shift right, "a_C"'] & \hat{\mathbb{D}} \arrow[l, "u_{\cdot}"'] \arrow[l, shift left=2, leftarrow, "u_r"'] \arrow[d, shift right, "a_D"'] \\
\widetilde{\mathbb{C}} \arrow[u, shift right, "i_C"'] \arrow[r, shift left=2, "u^*"] & \widetilde{\mathbb{D}} \arrow[u, shift right, "i_D"'] \arrow[l, "u_*"'] \arrow[l, shift left=2, leftarrow, "u_r^*"']
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{C}$ を small site $(\mathbb{C}, K)$, $\mathbb{D}$ を loc small site $(\mathbb{D}, J)$ とし、$\hat{\mathbb{C}}$, $\hat{\mathbb{D}}$ をそれぞれ $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ 上の層の圏とする。

$\hat{\mathbb{C}} \underset{i_C}{\overset{a_C}{\rightleftarrows}} \widetilde{\mathbb{C}}$ $\quad$ $\hat{\mathbb{D}} \underset{i_D}{\overset{a_D}{\rightleftarrows}} \widetilde{\mathbb{D}}$ (a. associated sheaf functor)

を用いて $u_* : \widetilde{\mathbb{D}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$, $u^*, u_r^* : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{D}}$ を定義する

$$u^* = a_D \cdot u^{\cdot} \cdot i_C$$
$$u_* = a_C \cdot u_{\cdot} \cdot i_D$$
$$u_r^* = a_D \cdot u_r \cdot i_C$$

$(2.1)_e$ $\langle u^{\cdot}, u_{\cdot} \rangle$ が geometric morphism のとき、次の条件は同値である。

(i) $u^* \dashv u_*$ このとき $\langle u^*, u_* \rangle$ は geometric morphism になる。

(ii) $u^{\cdot} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{D}}$ は dense mono を dense mono にうつす。

(iii) $u_{\cdot} : \hat{\mathbb{D}} \to \hat{\mathbb{C}}$ は sheaf を sheaf にうつす。

$(2.2)_e$ 次の条件は同値である。

(i) $u_* \dashv u_r^*$ ($\langle u_* \ u_r^* \rangle$ はつねに geometric morphism.)

(ii) $u_{\cdot} : \hat{\mathbb{D}} \to \hat{\mathbb{C}}$ は dense mono を dense mono にうつす。

(iii) $u_r : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{D}}$ は sheaf を sheaf にうつす。

(2.1) (2.2) は次の定理 (Lawvere Tierney [J] 3.47) から出る。

$(2.3)_i$ $f = \langle f_* \ f^* \rangle$ $(f^* \dashv f_*)$ は Topos $\mathcal{E}$ と $\mathcal{F}$ の間の geometric morphism とする。j を $\mathcal{F}$ の topology とし、geometric morphism $i : \widetilde{\mathcal{F}}_j \to \mathcal{F}$ を $\langle i, a \rangle$ とする。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & \mathcal{F} \\ & \tilde{\mathcal{F}}_j \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

そのとき次の条件は同値である．

(i) f は i を通る．すなわち geometric morphism $g = \langle g_*, g^* \rangle$ があって左図が可換．

(ii) f^* は $\mathcal{F}$ の dense mono を $\mathcal{E}$ の iso にうつす．

(iii) f_* は $\mathcal{E}$ の object を $\mathcal{F}$ の j-sheaf にうつす．

2.3_i から 2.1_e, 2.2_e をいうためには上図のかわりに

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathbb{D}} \arrow[r, "\langle i_D\, a_D \rangle"] \arrow[dr, "\langle u_*\, u^* \rangle"'] & \hat{\mathbb{D}} \arrow[r, "\langle u_!\, u^* \rangle"] & \hat{\mathbb{C}} \\ & \tilde{\mathbb{C}} \arrow[ur, "\langle i_C\, a_C \rangle"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \tilde{\mathbb{C}} \arrow[r, "\langle i_C\, a_C \rangle"] \arrow[dr, "\langle u_p^*\, u_* \rangle"'] & \hat{\mathbb{C}} \arrow[r, "\langle u_p\, u_* \rangle"] & \hat{\mathbb{D}} \\ & \tilde{\mathbb{D}} \arrow[ur, "\langle i_D\, a_D \rangle"'] & \end{tikzcd}$$

を考えればよい．2.3_i の条件 (ii) と 2.1_e 2.2_e の条件 (i) は次の lemma でつながる．

2.4: lemma $\mathcal{E}$ を Topos, j を topology とする．associated sheaf functor $\mathcal{E} \xrightarrow{a} \tilde{\mathcal{E}}_j$ において

$$X' \rightarrowtail X \text{ dense in } \mathcal{E} \iff aX' \cong aX \qquad ([J]\ 3.4.2)$$

2.5_e u が left exact とはかぎらない場合，2.1の条件 (i) (ii) (iii) の関係は次の通りである．　(ii) $\iff$ (iii)

(ii) または (iii) $\Longrightarrow$ (i) $u^* \dashv u_*$

2.6_e 　2.1_e, 2.5_e の条件 (ii) が成立つための条件

R を $A \in \mathbb{C}$ の crible, R に対応する presheaf を $\hat{R}$ と書く．

family $\alpha = (A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I}$ に対し，$[\alpha]$ は α によって生成される crible,

$$u(\alpha) = (uA_i \to uA)_{i \in I} \qquad u(R) = \{uX \xrightarrow{uf} uA \ ;\ X \to A \in R\}$$

$$\alpha \in Cov_C(A) \iff [\alpha] \in K(A) \quad \text{によって } Cov_C(A) \text{ を定める}$$

($\mathbb{C}$ が finite left limit をもつときは そして そして成立している)

$B \in \mathbb{D}$ に対する $Cov_{\mathbb{D}}(B)$ も同様に定める.

u が continuous とは $\alpha \in Cov_{\mathbb{C}}(A) \Rightarrow u(\alpha) \in Cov_{\mathbb{D}}(uA)$ を意味するとする.

Prop. ① R を A の任意の crible とするとき $u^{\cdot}\hat{R} = [u(R)]^{\wedge}$ ($\mathbb{D}$ において $u(R)$ で生成される crible に対応する presheaf of $\hat{\mathbb{D}}$) は明は $u^{\cdot}: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{D}}$ の定義にもどって行なう.

② "$\hat{R} \rightarrowtail \hat{A}$ dense ならば $u^{\cdot}\hat{R} \rightarrowtail u^{\cdot}\hat{A}$" $\Longleftrightarrow$ u は continuous

① と 0.4 ③, $\hat{uA} = u^{\cdot}\hat{A}$, $[u(\alpha)] = [u(R)]$ ($R = [\alpha]$) を用いればよい.

2.7$_e$ (2.2) (ii) が成立つための条件

$u_{\cdot}: \hat{\mathbb{D}} \to \hat{\mathbb{C}}$ が dense mono を dense mono にうつすことをいうためには

(0.4)$_{ie}$ ⑤ によって $R \rightarrowtail X$ (X representable) in $\hat{\mathbb{D}}$ に対し. $u_{\cdot}R \rightarrowtail u_{\cdot}X$ が dense であることをいえばよい. さらに そのためには任意の射

$Y \to u_{\cdot}X$ (Y は representable in $\hat{\mathbb{C}}$) に対し

$$\begin{array}{ccc} S & \rightarrowtail & Y \\ \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow \\ u_{\cdot}R & \rightarrowtail & u_{\cdot}X \end{array}$$

ならば $S \rightarrowtail Y$ が dense in $\hat{\mathbb{C}}$ であることをいえばよい.

§3 Functor $\varepsilon_c: \mathbb{C} \xrightarrow{h^c} \hat{\mathbb{C}} \xrightarrow{a_c} \tilde{\mathbb{C}}$

3.1$_e$ $\mathbb{C}$ を finite left limit をもつ site とし, $\tilde{\mathbb{C}}$ を canonical Grothendieck topology をもつ site と考える. そのとき $\varepsilon = \varepsilon_c: \mathbb{C} \xrightarrow{h^c} \hat{\mathbb{C}} \xrightarrow{a_c} \tilde{\mathbb{C}}$ は continuous である. すなわち $\mathbb{C}$ の covering (αA) を $\tilde{\mathbb{C}}$ の εA の covering にうつす.

もっと正確に $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I} \in Cov_{\mathbb{C}}(A) \Longleftrightarrow (\varepsilon A_i \to \varepsilon A)_{i \in I} \in Cov_{\tilde{\mathbb{C}}}(\varepsilon A)$

証明. $\alpha = (A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I}$ と $F \in \tilde{\mathbb{C}}$ に対し.

$$
\begin{array}{ccccc}
\hat{\mathbb{C}}(A,F) & \longrightarrow \prod_{i\in I} & \hat{\mathbb{C}}(A_i,F) & \rightrightarrows \prod_{ij} & \hat{\mathbb{C}}(A_i\times_A A_j,F) \\
\wr\Vert & & \wr\Vert & & \wr\Vert \\
\tilde{\mathbb{C}}(aA,F) & \longrightarrow \prod_{i\in I} & \tilde{\mathbb{C}}(aA_i,F) & \rightrightarrows \prod_{ij} & \tilde{\mathbb{C}}(a(A_i\times_A A_j)\, F)
\end{array}
$$

縦の $\wr\Vert$ は $a \dashv i$ による.　　ここで

$\alpha = (A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i\in I} \in Cov_{\mathbb{C}}(A) \Longleftrightarrow$ すべての $F\in\tilde{\mathbb{C}}$ は α に関して sheaf property をもつ (0.3に) $\Longleftrightarrow$ 上の図式が equalizer である (すべての $F\in\tilde{\mathbb{C}}$ に対し)

$\Longleftrightarrow$ すべての $F\in\tilde{\mathbb{C}}$ に対して下の図式が equalizer となる

$\Longleftrightarrow$ $(aA_i\to aA)_{i\in I}$ が $\tilde{\mathbb{C}}$ において effective epimorphic である

$\Longleftrightarrow$ $(aA_i\to aA)_{i\in I}$ は $\tilde{\mathbb{C}}$ における aA の covering である.

(ここでの A_i, A は $\hat{A}_i, \hat{A}$ と同一視してある)

3.2 lemma (c.f. [MR] 1.49) Functor $I:\mathbb{R}\to\mathbb{S}$ において

(i) $\mathbb{R},\mathbb{S}$ は coequalizer をもつ $\mathbb{S}$ の epi は a coequalizer である.

(ii) I は full, faithful である

(iii) I preserve coequalizer

(iv) 任意の $S\in\mathbb{S}$ に対し. $R\in\mathbb{R}$ があって epi $IR \twoheadrightarrow S$ in $\mathbb{S}$ がある.

そのとき I は equivalence である.

証明　任意の $S\in\mathbb{S}$ に対し $IR\twoheadrightarrow S$ とでき これは $\mathbb{S}$ における ある coequalizer $X\rightrightarrows IR\twoheadrightarrow S$ である. $IR'\twoheadrightarrow X$ をとれ. そのとき $IR'\twoheadrightarrow X\rightrightarrows IR\twoheadrightarrow S$ も coequalizer となる. I は full だから $IR'\rightrightarrows IR$ は $\mathbb{R}$ における $R'\rightrightarrows R$ の像である. この coequalizer $R'\rightrightarrows R\twoheadrightarrow R''$ in $\mathbb{R}$ をつくると $IR\rightrightarrows IR'\to IR''$ は coequalizer, 故に $IR''\cong S$

3.3e $\mathbb{E}$ を cocomplete, set of generator をもつ Topos とする.

そのとき $\varepsilon=\varepsilon_{\mathbb{E}}:\mathbb{E}\to\tilde{\mathbb{E}}$ は equivalence.

ただし $\mathbb{E}$ にも $\tilde{\mathbb{E}}$ にも canonical Grothendieck Topology を入れてある.

証明 ε は epimorphic family を preserve し. したがってすべての small colimit を preserve する. ([MR], 3.4.10, 3.4.13)

ε は full, faithful である. なぜなら $A \overset{h^E}{\longmapsto} \hat{A} \overset{a}{\longmapsto} a\hat{A}$ において $\hat{A}\cong a\hat{A}$ だから. $\mathbb{C}$ を set of generators of $\mathbb{E}$ とすると $\{\varepsilon(C)\mid C\in\mathbb{C}\}$ は $\tilde{\mathbb{E}}$ の set of generators となる. 任意の $F\in\tilde{\mathbb{E}}$ に対し epimorphic family $(\varepsilon(X_i)\to F)_{i\in I}$ in $\tilde{\mathbb{E}}$ ここに $X_i\in\mathbb{C}$, そのとき $\coprod\varepsilon(X_i)\to F$ は epi となる ([M.R] 1.4.7).

ここで $X=\coprod_{i\in I}X_i$ とおけば $\varepsilon(X)\twoheadrightarrow F$ となる. すなわち ε は lemma 3.2 のすべての条件をみたす.

§4 Giraud の定理

$\mathbb{E}$ を cocomplete で set of generators をもつ Topos とする. そのとき canonical topology をもつ small site $\mathbb{C}$ が存在して

$$\mathbb{E}\simeq\tilde{\mathbb{C}}.$$

証明 (cf. [J] 0.45) $\mathbb{C}$ を $\mathbb{E}$ のすべての generator をふくみ, finite left limit をもつ full subcategory とし. canonical topology を入れる. inclusion を $u:\mathbb{C}\to\mathbb{E}$ とする.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h^C"'] & \mathbb{E} \arrow[d, "h^E"] \arrow[dl, "T"'] \\ \hat{\mathbb{C}} \arrow[d, "a_C"'] & \hat{\mathbb{E}} \arrow[l, shift right, "u^{\cdot}"'] \arrow[d, "a_E"] \\ \tilde{\mathbb{C}} \arrow[r, shift left, "u^*"] & \tilde{\mathbb{E}} \arrow[l, shift left, "u_*"] \end{tikzcd}$$

$T:\mathbb{E}\to\hat{\mathbb{C}}$ は $A\in\mathbb{E}$ に対し $\mathbb{C}$ 上の presheaf $X\mapsto\mathbb{E}(X,A)$ $(X\in\mathbb{C})$ を対応させる functor とする. すなわち $T=u.h^E$

4.1. $\mathbb{E}$ には canonical topology が入っているものとすると $(u^*\ u_*)$ は geometric morphism で

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E} \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "T'"'] & \hat{\mathbb{C}} \arrow[d, shift right, "a_c"'] \\ & \tilde{\mathbb{C}} \arrow[u, shift right, "i_c"'] \end{tikzcd}$$

$T : \mathbb{E} \to \hat{\mathbb{C}}$ は右図のように i_c を通る

$$T = i_c T', \quad T' = u_* \varepsilon_E = T' = a_c T.$$

なぜなら u は left exact continuous だから 1.3, 2.6 より 2.1 の条件がみたされるからである.

4.2 T は faithful, したがって T' もそうである.

$\mathbb{C}$ がすべての generator をもつから.

4.3 T は full したがって T' もそうである.

任意の $A \in \mathbb{E}$ が $A = \varinjlim_{\alpha} X_\alpha$ $(X_\alpha \in \mathbb{C})$ と書けることからわかる.

4.4 $T' : \mathbb{E} \to \tilde{\mathbb{C}}$ は right adjoint をもつ したがって任意の small colimit を preserve する. 実際 $u_* \dashv u_r^*$ といえばよいが 2.7 によって 2.2 の条件 (ii) をしらべると $A \in \mathbb{E}$ と任意の dense $R \rightarrowtail A$ in $\hat{\mathbb{E}}$ に対して 任意の $X \to u.A$ $(X \in \mathbb{C})$ in $\hat{\mathbb{C}}$ に対する

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{p.b}"] & X \arrow[d] \\ u.R \arrow[r, tail] & u.A \end{tikzcd}$$

において

$$S = \{Y \to X \text{ in } \mathbb{C} \ ; \ u(Y) \to u(X) \xrightarrow{\alpha} A \in R$$

$$= \{Y \to X \text{ in } \mathbb{C} \ ; \ Y \to X \in \alpha_*^{-1} R\} = map(\mathbb{C}) \cap \alpha_*^{-1}(R)$$

ここに $u(X) \xrightarrow{\alpha} A$ は Yoneda の lemma によって $X \to u.A$ に対応するものである. S が X の $\mathbb{C}$ における covering crible であることはあきらかである, すなわち $S \rightarrowtail X$ は dense.

4.5 任意の $F \in \tilde{\mathbb{C}}$ に対し, $A \in \mathbb{E}$ と $T'A \twoheadrightarrow F$ がある.

なぜなら $\{\varepsilon_c(X) ; X \in \mathbb{C}\}$ は $\tilde{\mathbb{C}}$ の generator^{set} であるから

$\mathbb{C}$ の object の family $(C_i)_{i\in I}$ があって $\coprod_{i\in I}\varepsilon(C_i) \twoheadrightarrow \mathbb{F}$ とできる([M.R] 1.47). $A=\coprod_{i\in I} C_i$ とおく. T' は $\mathbb{C}$ の object C_i をその representable sheaf にうつすから $T'C_i \cong \varepsilon_c(C_i)$ T' は $\coprod$ を preserve するから $TA \twoheadrightarrow F$ とできる. 3.2 によって $T' : \mathbb{E} \to \hat{\mathbb{C}}$ は equivalence.

4.6 系. $\mathbb{E}$ をこれまでと同じとする. ある cHa H が存在して $\mathbb{E} \simeq \hat{H} (= Sh(H)) \Longleftrightarrow \mathbb{E}$ は SG Topos, すなわち $Sub(1)$ が set of generators を作る.

§5 Progenitor (問題提起)

5.1. $\mathbb{E}$ は §4 と同じとし, P は $\mathbb{E}$ の progenitor とする. すなわちすべての generators をその subobject としてもつ $\mathbb{E}$ の object とする. 図 $\mathbb{H} = Sub(P)$ を考える. $\mathbb{H}$ は cHa である.

今度は inclusion $u : \mathbb{H} \to \mathbb{E}$ を考える($\mathbb{H}$, $\mathbb{E}$ には canonical topology が入るとして), 前と同じく $T : \mathbb{E} \to \hat{\mathbb{H}}$, $T = u \cdot h^{\mathbb{E}}$ とおくと, u は一般に left exact ではないが continuous だから 2.5, 2.6 より $u^* \dashv u_*$ で, $T' = u_* \varepsilon_E : \mathbb{E} \to \tilde{\mathbb{H}}$ が定まる.

T' は left exact, faithful, さらに true, $\supset$, $\wedge$, $\vee$, $\bigvee$, $\bigwedge$ を保存する. では T' は $\exists$, $\forall$ を保存するか? T' が $\exists$-preserve であるための条件は u_* が right adjoint u_r^* をもつことである([M.R] 3.4.10).

したがって 2.7 によってこれは $\mathbb{E}$ における任意の A の covering crible R と $X \xrightarrow{\alpha} A$ $(X \in \mathbb{H})$ に対し, $\alpha_*^{-1}(R) \cap map(\mathbb{H})$ が $\mathbb{H}$ における X の covering crible となることである.

§6 Diaconescu embedding

6.1. $\mathbb{E}$ はこれまでと同じとする。$\mathbb{E}$ に対し cHa H で f^* が faithful であるような geometric morphism $\mathbb{E} \xrightarrow{\langle f^*\, f_* \rangle} Sh(H)$ $(f^* \dashv f_*)$ が存在する. Diaconescu は次のように示した (c.f. [J] 7.51).

$\mathbb{C}$ を §4 と同じとする。$\mathbb{E} \simeq \widetilde{\mathbb{C}}$, Poset P を次のように定める.

P の object は composable strings of map of $\mathbb{C}$ $w = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)$, $d_1(\alpha_i) = d_0(\alpha_{i+1})$

$$w_1 \leq w_2 \overset{\mathrm{Df}}{\Longleftrightarrow} w_1 = (\alpha_1 \cdots \alpha_m w_2) \text{ の形.}$$

functor $d : P \to \mathbb{C}$ は $(\alpha_1 \cdots \alpha_n) \mapsto d_0(\alpha_1)$ で定める. $w_1 \leq w_2$ に対する $d(w_1) \to d(w_2)$ は自然に定まる.

$\mathbb{C}$ の Grothendieck topology を $J(X)$ とし、P の Grothendieck topology $K(w)$ を次のように定める. $w \in P$ の crible S に対し

$$S \in K(w) \overset{\mathrm{Df}}{\Longleftrightarrow} \forall w' \leq w \, \{ d(w'') \to d(w') \mid w'' \leq w', w'' \in S \} \in J(d(w'))$$

このとき d は 2.1 (ii) をみたし d. は定2 (ii) をみたす。これから $d^* \dashv d_* \dashv d_r^*$ がわかり、さらに d_* は faithful となる ([J] 7.51).

$\mathbb{E} \simeq \widetilde{\mathbb{C}} \xrightarrow{\langle d_*\, d_r^* \rangle} \widetilde{P}$ ($\widetilde{P}$ は K-sheaf の圏) の geometric morphism で $\hat{P}$, $\widetilde{P}$ はつねに SG だから ([J] 5.34) 求めるものである.

6.2 Diaconescu embedding は $L_{\infty,\omega}$-1st order logical である.

functor $Q : \mathbb{E} \underset{\simeq}{\xrightarrow{T'}} \widetilde{\mathbb{C}} \xrightarrow{d_*} \widetilde{P}$ を考える

$A \in \mathbb{E}$ に対し $QA \cong \mathbb{E}(d(-), A)$ である。この Q は

(1) Ω-preserving (2) $\neg, \wedge, \vee, \to$ preserving

(3) $\bigvee, \bigwedge$-preserving (4) $\exists, \forall$-preserving である.

(2), (3) と (4) の ∃ は $\langle d_*\ d_r^* \rangle$ が geometric morphism であることから出る。
(1) は後述する。∀-preserving というためには Q が sublogical であることをいえばよい。$\mathbb{E} \xrightarrow{f} \mathbb{F}$ を 2つの Topos $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ 間の Ω-preserving product preserving functor とするとき、これが sublogical とは
$f(A)\times f(B^A) \xrightarrow{f(ev)} f(B)$ ~~≅Ω~~ の exp. conjugate $f(B^A) \to f(B)^{f(A)}$ が mono となることである。しかるに

Prop (Mikkelsen) left exact, Ω-preserving functor $f: \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ が sublogical であるための条件は ∀-preserving であることである。

ので (4) の ∀-preserving というには Q が sublogical であることをいえばよい。

6.3、 6.2 の証明

(1) Q が sublogical であること

$Q(B^A)(P) = (d(P), B^A) \cong (d(P)\times A, B)$

$Q(B)^{Q(A)}(P) = Nat(QA\restriction P, QB\restriction P) = Nat[(d(-),A)\restriction P,\ (d(-),B)\restriction P]$

注) $\hat{P}$ の exponential B^A は $B^A(P) = Nat(A\restriction P, B\restriction P)$ できまる。ここに $A\restriction P$ は Functor $A: P \to \mathcal{S}et$ を $(P] = \{q\,;\,q \le P\}$ に制限したもので、$ev_P: B^A(P)\times A(P) \to B(P)$ は $ev_P(\tau, a) = \tau_P(a)$ によってきまる。

$k(P)$: $Q(B^A)(P) \longrightarrow Q(B)^{\Omega(A)}(P)$ $(d(P)\times A \xrightarrow{f} B \longmapsto \tau^f)$

を次のように定める。$q \le P$ に対して $\tau^f_q : (d(q), A) \to (d(q), B)$ は

$$d(q) \xrightarrow{a} A \longmapsto (d(q) \xrightarrow{\langle d(q\to P), a\rangle} d(P)\times A \xrightarrow{f} B \qquad (*)$$

k は $\hat{P}$ の射を与えるが mono である。

$k(P)$ が単射であることをいう. $d(P)\times A \underset{f'}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$, $f\neq f'$ とする.
$\mathbb{C}$ は generator をもつから $X\in\mathbb{C}$ があって $X \xrightarrow{\langle h,a\rangle} d(P)\times A \underset{f'}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ は
ことなる. $X=d(q)$, $q\le P$ ととることができて $\tau_q^f(a)\neq\tau_q^{f'}(a)$
したがって $\tau^f\neq\tau^{f'}$.

$Q(ev): Q(B^A)(P)\times QA(P)\longrightarrow QB(P)$
は $\langle d(P)\xrightarrow{\hat f} B^A,\ d(P)\xrightarrow{a} A\rangle$ を
$d(P)\xrightarrow{\langle\hat f,a\rangle} B^A\times A \xrightarrow{ev} B = d(P)\xrightarrow{\langle 1,a\rangle} d(P)\times A\xrightarrow{f} B$
にうつす.

$$\begin{tikzcd}
Q(B^A\times A)(P) \arrow[r, "Q(ev)"] \arrow[d, "k(P)\times 1"'] & QB(P) \\
Q(B)^{QA}(P)\times QA(P) \arrow[ur, "ev_{\tilde P}(P)"'] &
\end{tikzcd}$$

一方 $k(P)\times 1$ は $\langle f,a\rangle\in Q(B^A\times A)(P)$ を $\langle\tau^f,a\rangle\in QB^{QA}(P)\times QA(P)$
にうつすがこれは $ev_{\tilde P}(P)$ によって
$\langle\tau^f,a\rangle \xmapsto{ev_{\tilde P}(P)} \tau_P^f(a) = d(P)\xrightarrow{\langle 1,a\rangle} d(P)\times A\xrightarrow{f} B$ にうつす.
ゆえに上図は可換になる.

(2) Q が Ω-preserving であること.

site $(\mathbb{C},J)$ において $J\rightarrowtail\Omega$ in $\hat{\mathbb{C}}$ の classifying map $j:\Omega\to\Omega$
は $j_X(R)=\{Y\xrightarrow{f}X \mid f_*^{-1}(R)\in J(Y)\}$ で与えられる ([0.2] (3)④),
$\tilde{\mathbb{C}}$ の subobject classifier Ω_j は j の image であり. J が canonical topology の場合には $\Omega_j(X)\cong\mathbb{E}(X,\Omega)\simeq Sub_{\mathbb{E}}(X)$ ($\mathbb{E}=\tilde{\mathbb{C}}$)
となる. site (P,K) における $K\rightarrowtail\Omega$ in $\hat{P}$ の classifier $k:\Omega\to\Omega$
は $k_w(r)=\{w'\le w \mid [w']\cap r\in K(w')\}$ (r は w の crible) で与えられ,
$\tilde{P}$ の subobject classifier Ω_k は k の image である.
以下で $\Omega_k(w)\cong Sub_{\mathbb{E}}(d(w))\cong\mathbb{E}(d(w),\Omega)$ を示す.
P における w の crible r に対し, $dr=\{dw'\to dw\ ;\ w'\in r\}$

とおけば，これは $\mathbb{C}$ における dw の crible であることに注意しよう．$K(w)$ の定義から

$$w' \in k_w(r) \Longleftrightarrow w' \leq w,\ \forall w'' \leq w' \{dw''' \to dw'' \mid w''' \leq w'',\ w''' \in r\} \in J(dw'') \ ①$$

$$\Longleftrightarrow w' \leq w,\ \forall w'' \leq w' \{X \to dw'' \mid X \to dw'' \to dw' \to dw \in dr\} \in J(dw'') \ ②$$

実際①の{ }の部分を S_1 とし，②の{ }の部分を S_2 とし，

$S_3 = \{dw''' \to dw'' \mid w''' \leq w''\}$ とおけば S_3 は実は dw'' の max. crible で $J(dw'')$ に属する．そして $S_1 = S_2 \wedge S_3$ が成立つ．②より

$$w' \in k_w(r) \Longleftrightarrow w' \leq w,\ \forall w'' \leq w' (dw'' \to dw' \to dw \in j_{dw}(dr))$$

$$\Longleftrightarrow w' \leq w,\ dw' \to dw \in j_{dw}(dr)$$

したがって $k_w(r) = k_w(r') \Longleftrightarrow j_{dw}(dr) = j_{dw}(dr')$

ゆえに $\Omega_k(w)$ の元は $\Omega_j(dw)$ の元を定め，逆に dw の crible R に対して $r = \{dw' \to dw \in R,\ w' \leq w\}$ は w の crible で $dr = R$ となるから $\Omega_j(dw)$ の元は $\Omega_k(w)$ の元を定める．

したがって $\Omega_k(w) \cong \Omega_j(dw) \cong Sub_{\mathbb{E}}(dw)$ となる．

§7 Progenitor（つづき）

$\mathbb{E}$ は§4と同じとし，次のような $\mathbb{E}$ の object P を考える．

$\mathbb{H} = Sub(P)$ となるとき

(1) $\mathbb{H}$ は $\mathbb{E}$ の set of generators $\mathbb{G}$ をふくむ．すなわち P は Progenitor である．

(2) 任意の generator $X \in \mathbb{G}$ に対し，$X \twoheadrightarrow Y$ in $\mathbb{E}$ ならば $Y \in \mathbb{H}$ である．

このような Progeniter P はつねに作れる.

7.1 $\mathbb{H}$-covering　定義: $A\in\mathbb{E}$ に対する family of Map $(X_i\to A)_{i\in I}$ が $\mathbb{H}$-covering であるとは $X_i\in\mathbb{H}$, $X_i\to A$ は mono, かつ $\bigvee_{i\in I}X_i=A$ となることである.

Prop 7.1.　任意の $A\in\mathbb{E}$ に対し A の $\mathbb{H}$-covering は存在する. 実際、$\mathbb{H}$ に対する条件(1)より $(X_i\xrightarrow{f_i}A)_{i\in I}$ $X_i\in\mathcal{G}$ の形の epimorphic family がある. epi-mono 分解によって $X_i\twoheadrightarrow X_i'\xrightarrow{f_i'}A$ を作れば仮定(2)によって $X_i'\in\mathbb{H}$ かつ $\bigvee_{i\in I}X_i'=A$ である.

7.2　Topology $J(A)$　A の crible の集合 $J(A)$ を次のように定める.

定義　crible $R\in J(A)\iff R$ は $\mathbb{H}$-covering をふくむ.

Prop 7.2　$J(A)$ は Grothendieck Topology である.

[証明]　$Cov(A)\ni\alpha\iff[\alpha]\in J(A)$ として $Cov(A)$ が $Cov(i)\sim(iv)$ をみたすことをいえばよい.

$\alpha=(A_i\xrightarrow{f_i}A)_{i\in I}\in Cov(A)\iff I_0\subseteq I$ と $X_i\in\mathbb{H}$, $X_i\to A_i$ が $i\in I_0$ に対して存在して $(X_i\to A_i\xrightarrow{f_i}A)_{i\in I_0}$ が H-covering となることに注意する. 条件 Cov(i) は max-crible が $\mathbb{H}$-covering をふくむことを意味し、Prop 7.1 によって成立つ.

Cov(ii) は $(X_i\rightarrowtail A)_{i\in I}$ が $\mathbb{H}$-covering ならば $B\to A$ に対し $(X_i\times_A B\rightarrowtail B)_{i\in I}$ も $\mathbb{H}$-covering になることから明らか.

条件 Cov(iv)(monotonicity) は $\alpha\in Cov\,A$, $[\alpha]\subset[\beta]$ ならば $\beta\in Cov(A)$ であることを意味するが, $[\alpha]$ が $\mathbb{H}$-covering

をふくめば[β]もそれをふくむから $\beta \in Cov(A)$ となる.

Cov(iii) $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i\in I} \in Cov(A)$, $(A_{ij} \xrightarrow{g_{ij}} A_i)_{j\in J_i} \in Cov(A_i)$ for $i \in I$ ならば $(A_{ij} \xrightarrow{g_{ij}} A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i\in I,\, j\in J_i} \in Cov(A)$ をいう.

$(X_i \to A_i \to A)_{i\in I_0}$ が Hl-covering, $(X_{ij} \to A_{ij} \to A_i)_{j\in (J_i)_0}$ が Hl-covering とする.

$$\begin{tikzcd}
Y_{ij} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "p.b"] & B_{ij} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "p.b"] & X_i \arrow[d] & \\
X_{ij} \arrow[r] & A_{ij} \arrow[r] & A_i \arrow[r] & A
\end{tikzcd}$$

を作れば $(Y_{ij} \to B_{ij} \to X_i)_{j\in (J_i)_0}$ は X_i の Hl-covering であり、

したがって $(Y_{ij} \to B_{ij} \to X_i \to A_i \to A)_{i\in I_0,\, j\in (J_i)_0}$ は A の Hl-covering であり. したがってまた

$$(Y_{ij} \to X_{ij} \to A_{ij} \to A_i \to A)_{i\in I_0,\, j\in (J_i)_0}$$

も A の Hl-covering であり. これらは $(A_{ij} \to A_i \to A)_{i\in I,\, j\in J_i}$ から生成されるcribleに入るから $(A_{ij} \to A_i \to A)_{i\in I,\, j\in J_i} \in Cov(A)$.

7.3　7.2で導入したTopologyによる $\mathbb{E}$ 上のsheafの圏を $\tilde{\mathbb{E}}$ とするとき $\varepsilon_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \to \tilde{\mathbb{E}}$ は equivalence である.

[証明] $(3.3)_e$ の条件はすべてみたされる. まず $\varepsilon_{\mathbb{E}}$ は left exact continuous だからある geometric morphism の inverse image となり. したがって任意の small colimit を保存する. 任意の $A \in \mathbb{E}$ に対する representable $\hat{A}$ は $Cov(A)$ の family に対して sheaf-property をもつから sheaf, したがって $\hat{A} \cong a_* \hat{A}$ ゆえに $\varepsilon_{\mathbb{E}}$ は full かつ faithful, $F \in \tilde{\mathbb{E}}$ に対して $\varepsilon_{\mathbb{E}} X \twoheadrightarrow F$ となる $X \in \mathbb{E}$ があることも同じ.

<u>Theorem</u> $\mathbb{H}$ に canonical topology ($\mathbb{H}$-covering による Topology と同じ) $\mathbb{E}$ に上の topology を入れ, inclusion $u : \mathbb{H} \to \mathbb{E}$ を考える.
そのとき $T' = u_* \circ \varepsilon_E : \mathbb{E} \to \widetilde{H}$ は $L_{\infty,\omega}$-1st order logical である.

〔証明〕 §5で述べたように $\forall\exists$-preserving だけが問題であるが $\exists$ に関しては 任意の $R \in J(A)$ ーすなわち $R \rightarrowtail A$ dense に対し $X \xrightarrow{\alpha} A$ $(X \in \mathbb{H})$ に対して $\alpha_*^{-1}(R) \in J(X)$ だから X の H-covering をふくむ. すなわち $\alpha_*^{-1}(R) \cap map(\mathbb{H})$ は $\mathbb{H}$-covering をふくみ X の $\mathbb{H}$ における covering crible となる. すなわち $u_* \dashv u_r^*$, したがって $\exists$-preserve である. $\forall$-preserving をいうには $T = u_* \circ h_E$ が sublogical であることをいえば十分だが, それは 6.3 の (1) "Q は sublogical" の証明と同様である.